

MATEMÁTICA

Convenções: Considere o sistema de coordenadas cartesiano, a menos que haja indicação contrária.

$\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \dots\}$: denota o conjunto dos números naturais.

$\mathbb{R}$: denota o conjunto dos números reais.

i : denota a unidade imaginária, $i^2 = -1$.

$\overline{AB}$: denota o segmento de reta de extremidades nos pontos A e B .

$m(\overline{AB})$: denota o comprimento do segmento $\overline{AB}$.

Questão 01. Descreva todas as progressões aritméticas de 10 números naturais cuja soma resulte em 435.

Questão 02. Determine todos os valores $x \in \mathbb{R}$ tais que $|\log_2(2^x + 2)| > |2x|$.

Questão 03. Seja r um número real positivo. No plano complexo, considere o polígono cujos vértices são as oito raízes da equação $r + iz^8 = 0$. Sabendo que a área desse polígono é $\sqrt{2}$, determine o comprimento de seus lados e o valor de r .

Questão 04. Considere o polinômio $p(x) = x^7 + 3ax^6 - x^5 - 5ax^4 + 7x^3 - 7ax^2 + 9x + a$, em que a é um número real. Sabendo que $p(x)$ é divisível pelo polinômio $q(x) = x^3 - 3x - 2$, determine todas as raízes de $p(x)$.

Questão 05. Seja ABC um triângulo no plano cartesiano com vértices na elipse de equação $2x^2 + y^2 = 6$. Sabendo que os vértices A e B têm abscissa 1 e que o perímetro de ABC é 10, determine a abscissa do vértice C .

Questão 06. Determine quantas sêxtuplas ordenadas de números naturais $(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6)$ satisfazem o sistema

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 + 3x_6 = 30, \\ x_1 + 2x_2 + 2x_3 + 2x_4 + 2x_5 + 4x_6 = 52, \\ 2x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 3x_4 + 3x_5 + 7x_6 = 76. \end{cases}$$

Questão 07. Determine todos os valores inteiros n tais que o quociente

$$\frac{2n^3 - 5n^2 - 52n + 90}{n^2 - 2n - 27}$$

seja um número inteiro.

Questão 08. Considere um retângulo $ABCD$ cujos lados medem $m(\overline{AB}) = 10$ e $m(\overline{BC}) = 6$. Um retângulo $EFGH$ é inscrito em $ABCD$, com E pertencente ao lado $\overline{AB}$ e distinto de A e B , e F pertencente ao lado $\overline{BC}$ e distinto de B e C .

- a) Se x representa a distância do ponto A ao ponto E , determine os possíveis valores de x .
- b) Se a área de $EFGH$ é 30, determine as medidas de seus lados.

Questão 09. Considere uma pirâmide reta cuja base é um hexágono regular de lado 4. As faces laterais dessa pirâmide são triângulos isósceles cujo ângulo do vértice superior é $\frac{\pi}{6}$. Traça-se uma seção plana na pirâmide de modo que essa seção passa pela diagonal maior da base e é paralela a uma das faces laterais. Calcule a área dessa seção.

Questão 10. Considere a função $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ dada por

$$f(x) = \sqrt{1 + \cos(2x)} + \sqrt{1 - \cos(2x)} - \sin(x) - \cos(x).$$

Determine todos os números inteiros k tais que a equação $f(x) = k$ possua pelo menos uma solução real x pertencente ao primeiro ou ao terceiro quadrante do círculo trigonométrico.