**CONCURSO DE ADMISSÃO**
**AO**
**CURSO DE FORMAÇÃO E GRADUAÇÃO**

**MATEMÁTICA**

**CADERNO DE QUESTÕES**

**2026/2027**

| **1ª QUESTÃO** | **Valor: (1,0)** |
|---|---|

Sejam $z$

| **2ª QUESTÃO** | **Valor: (1,0)** |
|---|---|

Seja a equação abaixo, onde $z \in \mathbb{C}$

$$1 + z + z^2 + z^3 + z^4 + z^5 = 0$$

Ao escolher ao acaso uma raiz qualquer dessa equação, qual a probabilidade dela satisfazer a inequação abaixo?

$$\left| z - \frac{3}{2} \right| \leq \frac{\sqrt{7}}{2}$$

| **3ª QUESTÃO** | **Valor: (1,0)** |
|---|---|

Para cada número inteiro positivo $n$, seja $g_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ a função definida por

$$g_n(x) = \begin{cases} 0, \text{ se } & x \leq -\dfrac{1}{n} \\ 1, \text{ se } & -\dfrac{1}{n} < x \end{cases}$$

Seja, ainda, $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \left( \frac{g_n(x)}{3} \right)^n$$

Determine o menor valor inteiro de $x$ para o qual

$$f(x) + f\left(-\frac{1}{x}\right) \geq 0,999$$

| **4ª QUESTÃO** | **Valor: (1,0)** |
|---|---|

Determine o valor de

$$(y_1 + x_1)(y_1 + x_2)(y_2 + x_1)(y_2 + x_2)(y_3 + x_1)(y_3 + x_2)$$

em que $(y_1, y_2, y_3)$ e $(x_1, x_2)$ são respetivamente as raízes das equações $y^3 - 4y - 2 = 0$ e $x^2 - 7x - 3 = 0$.



$, \ z_1, \ , \ldots, \ z_{11}$ as doze raízes complexas da equação $z^{12} = 1$, representadas no plano

| 5ª QUESTÃO | Valor: (1,0) |
|---|---|

Sejam $x_1,\ x_2, \ldots,\ x_9$ números reais positivos tais que $\log_2 x_1,\ \log_2 x_2, \ldots,\ \log_2 x_9$ formam uma progressão aritmética de razão positiva. Sabe-se que $x_1 \cdot x_3 \cdot x_5 \cdot x_7 \cdot x_9 \cdot = 2^{45}$ e que $x_2 + x_4 + x_6 + x_8 = 5540$. Determine $x_1 + x_3 + x_5 + x_7 + x_9$.

| 6ª QUESTÃO | Valor: (1,0) |
|---|---|

Seja $\mathcal{S} = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$. Escolhe-se ao acaso uma função bijetora $f : \mathcal{S} \to \mathcal{S}$. Sabendo-se que $f^{(9)} = \underbrace{f \circ f \circ \cdots \circ f}_{9 \text{ vezes}}$, qual a probabilidade de que $f^{(9)}(1) = 1$?

| 7ª QUESTÃO | Valor: (1,0) |
|---|---|

Considere $m$ e $n$ inteiros positivos, com $m > n$. Sejam $\mathbf{A} = [a_{ij}]_{3\times(n+2)}$ e $\mathbf{B} = [b_{ij}]_{(n+2)\times 3}$ matrizes cujas entradas são dadas, respectivamente, pelas combinações

$$a_{1j} = \binom{m}{j-3}, \quad a_{2j} = \binom{m}{j-2}, \quad a_{3j} = \binom{m}{j-1}$$

com $1 \leq j \leq n+2$ e

$$b_{i1} = b_{i2} = \binom{n}{n+2-i}, \quad b_{i3} = \binom{n+1}{n+2-i},$$

para $1 \leq i \leq n+2$. Em que,

$$\binom{a}{b} = \frac{a!}{b!(a-b)!}$$

para $a$ e $b$ inteiros não-negativos, com $b \leq a$ e

$$\binom{a}{c} = 0$$

para $c < 0$ ou $c > a$

Usando as propriedades relacionadas a combinações, mostre que, para $m = 2^{10}$ e $n = 10^3$, o traço de $\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}$ é divisível por $1013$.

| 8ª QUESTÃO | Valor: (1,0) |
|---|---|

Sejam $n \in \mathbb{N}$ e $\alpha \in \mathbb{R}$ tais que

$$\operatorname{sen} \alpha \neq 0 \qquad \text{e} \qquad \cos(j\alpha) \neq 0, \quad j = 1, 2, \ldots, n+1$$

Mostre a identidade

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\cos\alpha + \cos(2k+1)\alpha} = \frac{\operatorname{sen}(n\alpha)}{\operatorname{sen}(2\alpha)\cos((n+1)\alpha)}$$

| 9ª QUESTÃO | Valor: (1,0) |
|---|---|

A normal no ponto $P$ da elipse

$$x^2 + 4y^2 = 16$$

intercepta o eixo $x$ no ponto $Q$. Se $M$ é o ponto médio do segmento $PQ$, determine os pontos em que o lugar geométrico de $M$ intersecta as retas $x = +c$ e $x = -c$, sabendo que $2c$ é a distância entre os focos da elipse dada.

| 10ª QUESTÃO | Valor: (1,0) |
|---|---|

Considere um prisma quadrangular reto, completamente contido em uma esfera $\mathcal{S}$ de raio $6\,\mathrm{cm}$. Sabe-se que os quatro vértices de uma das faces do prisma pertencem à superfície da esfera $\mathcal{S}$. Determine:

(a) o volume máximo que esse prisma pode assumir;

(b) a altura e as dimensões da base do prisma correspondentes a esse volume máximo.

**RASCUNHO**